21-12-20.

Η ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης / αναγωγή στη μορφή Δ (σ. 123).

(Δ): $(Py')' + Qy = 0$

όπου υποτίθεται ότι P είναι μία θετική συνάρτηση που έχει συνεχή παρ. στο διάστημα I και Q είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο I.
[Σύμφωνα με το θεώρημα 25, κάθε ομογενής γραμμική δ.ε. $2^{ης}$ τάξης, που οι συντελεστές της είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο I και ο συντελεστής της y'' δεν μηδενίζεται πουθενά στο I, μπορεί να μετασχηματισθεί σε μία ισοδύναμη δ.ε. της μορφής (Δ)].

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (E_0) με $a_2(x) \neq 0$

$$\Rightarrow y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_2} ds} \cdot y'' + \frac{a_1}{a_2} \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_2} ds} \cdot y'} + \frac{a_0}{a_2} \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_2} ds} \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow \Big[\underbrace{e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_2} ds}}_{P(x)} \cdot y'\Big]' + \underbrace{\frac{a_0}{a_2} \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_2}(s) ds}}_{Q(x).} \cdot y = 0$$

Θεώρημα 27 (Τύπος του Abel): Αν y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής δ.ε. (Δ), τότε:
$P(x) \cdot [y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)] = k$, για κάθε $x \in I$, k σταθερά.

Απόδειξη (ενδεικτικά): $P(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}$

$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}$

y_1, y_2 λύσεις $\Big\|$: $[y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)] \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds} = W(x_0)$

$\rightsquigarrow P(x) \cdot [\ldots] = W(x_0) \ldots$

Ορθογώνιες οικογένειες συναρτήσεων:

$(E_0) \to (\Delta): [P(x)y']' + Q(x)y = 0$, $P(x) > 0$, $x \in I$.

$\Rightarrow [Py']' + \lambda Qy = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

λύσεις: $\left.\begin{aligned} y_1: [Py_1']' + \lambda_1 Q y_1 = 0 \,&|\cdot y_2 \\ y_2: [Py_2']' + \lambda_2 Q y_2 = 0 \,&|\cdot y_1 \end{aligned}\right\}$ πολ/σμός $P(a) = P(b) = 0$, $[a,b] \subseteq I$.

$$\leadsto [Py_1']' y_2 + \lambda_1 Q y_1 \cdot y_2 = 0$$

$$[Py_2']' y_1 + \lambda_2 Q y_1 \cdot y_2 = 0$$

$$\int_a^b [Py_1']' y \, ds + \lambda_1 \int_a^b Q y_1 y_2 \, ds = 0$$

$$\left.\begin{aligned} Py_1' y_2 \Big|_a^b - \int_a^b P y_1' y_2' \, ds + \lambda_1 \int_a^b Q y_1 y_2 \, ds = 0 \\ Py_2' y_1 \Big|_a^b - \int_a^b P y_1' y_2' \, ds + \lambda_2 \int_a^b Q y_1 y_2 \, ds = 0 \end{aligned}\right\}$$ αφαιρώ κατά μέλη

$\{y_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \int_a^b Q y_1 y_2 \, ds = 0$ με $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ και Q συναρ. βάρους

Πολυώνυμο Legendre:

Ας είναι $m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, το πολυώνυμο βαθμού m:

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k (2m-2k)!}{k!(m-k)!(m-2k)!} \cdot x^{m-2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

λέμε ότι είναι το πολυώνυμο Legendre βαθμού m.

Πχ

Για παράδειγμα:

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$,

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$, $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ.Ε. Chebyshev: Η γραμμική δ.ε δεύτερης τάξης:

(E_2): $(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0$ ($p\geq 0$ σταθερά)

Θα λέμε ότι είναι η δ.ε. Chebyshev τάξης p.

Τα σημεία -1,1 είναι κανονικά ανώμαλα της (E_2).

Θεώρημα 6: Ας είναι $m>0$, $m\in\mathbb{Z}$ και ας θεωρήσουμε την δ.ε. Chebyshev τάξης m: (E_2') $(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$

(*) (i) Η δ.ε. (E_2') έχει την m βαθμού πολυωνυμική λύση:

$$y_0(x)=\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k m!}{(2k)!(m-2k)!}(1-x^2)^k\cdot x^{m-2k},\ x\in\mathbb{R}$$

(ii) $m>0$, $m\in\mathbb{Z}$, το πολυώνυμο βαθμού m:

$$T_m(x)=\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k m!}{(2k)!(m-2k)!}(1-x^2)^k\cdot x^{m-2k},\ x\in\mathbb{R}$$

είναι το πολυώνυμο του Chebyshev βαθμού m

$[T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,\ x\in\mathbb{R}]$

Πρόταση 6: Για τυχόντες $m>0$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n>0$ $m\neq n$: $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}T_m(x)T_n(x)\,dx=0$

$$(*):\ y''-\frac{x}{1-x^2}y'+\frac{m^2}{1-x^2}y=0\rightarrow\Big[\underbrace{e^{-\int_0^x\frac{s}{1-s^2}ds}}_{(1)}y'\Big]'+\frac{m^2}{1-x^2}y=0,\ x\in(-1,1)$$

(1): $$\int_0^x\frac{s}{1-s^2}ds=-\frac{1}{2}\ln(1-s^2)\Big|_0^x=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=\ln(1-x^2)^{-1/2}$$

(1): $$[(1-x^2)^{-1/2}y']'+\frac{m^2}{1-x^2}y=0,\ x\in(-1,1)$$

$\rightsquigarrow$ $x\to 1$, $x\to -1$ || $[-a,a]$, $a\to 1$.

Θεώρημα 8 (Hermite): $y'' - 2xy' + 2my = 0$ (E_3'), $m>0$, $m\in\mathbb{Z}$

$y_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{k!(m-2k)!}\cdot(2x)^{m-2k}$, $x\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ m-βαθμού πολ. λύση.

Απόδειξη: $y'' - 2xy' + 2my = 0$

$$\Big[\underbrace{e^{-\int_0^x 2s\,ds}}_{p}\, y'\Big]' + e^{-\int_0^x 2s\,ds}\, 2my = 0$$

$$[e^{-x^2} y']' + e^{-x^2} 2my = 0 \rightarrow P(a) = P(b) = 0$$

$$\lim \int_{-a}^{a} e^{-s^2} y_m y_n = 0 \rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} P(x) = 0$$

Πx **Παράδειγμα 3: (Προβλήματα Συνοριακών Τιμών):**

(i) $y'' + y = x$, $x\in[0,\pi]$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = 1$

(ii) $y'' + y = x$, $x\in[0,\pi/2]$, $y(0) = 2$, $y(\pi/2) = 1$

Έχει μοναδική λύση

(iii) $y'' + y = x$, $x\in[0,\pi]$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = \pi - 2$.

Έχει άπειρες λύσεις

Προβλήματα Ιδιοτιμών: (να δω θεώρημα 31 → ιδιοτιμές).

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (E), $x\in[a,b]$

$(Py')' + Qy = 0 \longrightarrow (py')' + (q + \lambda r)y = 0$, p, q, r πραγ. συναρτ. στο $[a,b]$,
η p είναι θετική και έχει συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$,
η q είναι συνεχής στο $[a,b]$, η r είναι θετική και συνεχής στο $[a,b]$
και λ είναι μία πραγμ. παράμετρος. Έστω οι συνοριακές συνθήκες:
(c): $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$, $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$,
όπου $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$ πραγμ. σταθερές με $|a_1| + |a_2| > 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$

Πx **Παράδειγμα 5:** Να επιλυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών:
$y'' + \lambda y' = 0$, $x\in[0,\pi]$: $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$
Η ακολουθία ιδιοτιμών είναι $\lambda_n = n - 1/2$ $(n = 1, 2, ..)$ και μία
ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων (για $c_2 = 1$): $y_n(x) = \sin(n-1/2)x$, $x\in[0,\pi]$.